Annales
corrigées et commentées

Concours
2023 / 2024

MP

Physique Chimie

2e édition

Mines-Ponts
Polytechniques
Centrale-Supélec

Copies d'étudiants corrigées

ellipses

Claire Boggio
Christophe Caire

2023 CCMP – Physique 1
Fonctions spéciales
Corrigé

Commentaires
L'épreuve comporte trente-quatre questions numérotées à traiter en 3h. Le candidat dispose, en moyenne, de moins de cinq minutes pour traiter chaque question. La présence de sous questions, et l'exigence d'une bonne technicité mathématique a très certainement limité le nombre de candidats pouvant traiter l'intégralité du sujet. La dépendance importante des questions nous contraint toutefois à une approche séquentielle respectant l'ordre naturel du sujet. L'énoncé prend prétexte de l'existence de fonctions mathématiques spéciales pour aborder différents thèmes du programme. Les trois grandes parties vous permettront d'étudier : – I La fonction W de Lambert Mécanique – chute libre, puis avec frottements. 15 questions – II L'intégrale elliptique de première espèce Mécanique – Oscillateur linéaire, et non linéaire. 7 questions – III La fonction d'erreur de Gauss Les transferts thermiques – onde thermique. 12 questions Extraits du rapport de jury : *« Le sujet de physique 1 portait sur les fonctions spéciales et leur utilisation en physique. Ces fonctions qui ne peuvent pas être exprimées à l'aide des fonctions usuelles n'en restent pas moins des fonctions très utiles. Elles étaient une excuse pour aborder successivement des problèmes de mécanique (parties I et II) et la thermodynamique (partie III).... ».* La connaissance de ces fonctions spéciales est hors programme. La rigueur et une bonne, voire excellente, technique mathématique sont des qualités précieuses pour aborder ce type de sujet.

Note : Tous les codes python fournis dans cet énoncé font usage des appels classiques des librairies *numpy* et *matplotlib*.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

I – La fonction de W de Lambert

I.A Tir d'un projectile sans frottements

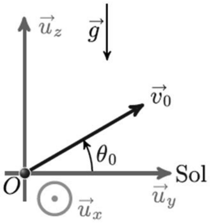


FIGURE 1 – Tir d'un projectile

Un projectile assimilé à un point matériel de masse m est lancé à partir du sol en O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} \in (O, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ et faisant un angle θ_0 avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Un référentiel est un observateur.

Il se caractérise par un point, une orientation de l'espace, une métrique de l'espace et du temps (horloge). En physique, il se définit souvent comme un solide virtuel, mais cette notion est de peu d'usage pour la génération actuelle puisque le modèle du « solide » n'est pas très étudié.

Un référentiel est généré, de façon pratique, par un point d'origine, une horlooge, et un repère cartésien implicite ou explicite lié à ce point.

Il est bien sur possible de définir, dans un référentiel, toutes sortes de repères en fonction des besoins. S'ils ne sont pas cartésiens, ils seront souvent définis par rapport au repère cartésien initial.

Un référentiel est dit galiléen si le principe d'inertie de Newton y est vérifié pour tout point matériel.

La définition précédente est toutefois de peu d'usage pour qualifier un référentiel galiléen, car le principe d'inertie n'est valable que dans un référentiel …galiléen. Nous sommes donc face à un ouroboros.

A ce stade, le seul moyen de s'en sortir est de supposer l'existence d'un référentiel de référence défini comme galiléen, et de regarder si votre référentiel d'étude appartient à la même classe.

A la question « le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ? », la réponse dépend du référentiel de référence galiléen que nous choisissons. Dans ce contexte, le choix d'usage, ici défini implicitement, est le référentiel géocentrique sidéral.

Pour que le référentiel terrestre soit galiléen, il faut qu'on puisse considérer que ce référentiel se déplace en translation rectiligne par rapport au référentiel de référence. Nous devons pouvoir négliger le mouvement de rotation et de translation circulaire du terrestre par rapport au géocentrique. La durée du phénomène analysé doit être donc très inférieure à la période de rotation terrestre.

Soit τ la durée temporelle du phénomène, T la période de rotation terrestre.
Il faut que :

$$\boxed{\tau \ll (T = 86.4\ 10^3\ s)}$$

2. Nous exploitons le principe fondamental de la dynamique sur le point matériel :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

Nous intégrons en exploitant les conditions initiales du mouvement, à $t = 0$, la vitesse vaut $\overrightarrow{v_0}$, et la position est celle de O.

$$\vec{v} = \vec{g}\,t + \overrightarrow{v_0}$$
$$\vec{r} = \vec{g}\,\frac{t^2}{2} + \overrightarrow{v_0}\,t$$

L'intégration vectorielle effectuée, nous assurons l'expression analytique sur chaque coordonnée :

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = v_0 \cos\theta_0\, t \\ z = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\theta_0\, t \end{cases}}$$

Le caractère plan du mouvement est assuré par l'expression horaire du mouvement $x = 0$, il suffit donc de signaler l'évidence.

Commentaires

L'inversion de l'ordre des sous questions du sujet aurait exigé une réponse distincte, dont nous donnons les éléments ci-après.

Le caractère plan est assuré par la caractère constant de l'accélération.
La trajectoire, par intégration, est construite sur deux « bases vectorielles », l'accélération constante et la vitesse initiale, le mouvement est sur un unique plan si vitesse initiale et accélération ne sont pas colinéaires.

Rapport de Jury :
Très bien traitée. Néanmoins un certain nombre de copies ne connaissent pas la définition d'équation horaire (x(t), y(t), z(t)), et confondent avec la notion de trajectoire (z(y)).

3. L’équation de la trajectoire s’obtient en éliminant la variable temporelle.
Si $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$t = \frac{y}{v_0 \cos\theta_0}$$

Par substitution, nous obtenons :

$$\boxed{z = -\frac{g}{2\, v_0^2\ \cos^2\theta_0} y^2 + \tan\theta_0\, y}$$

La trajectoire est parabolique et concave.
C’est une courbe symétrique, mais il nous faut dépasser le stade de la simple déclaration.

L’axe de symétrie est mis en évidence en mettant l’expression de la trajectoire sous forme canonique.

$$z = -\frac{g}{2\, v_0^2\ \cos^2\theta_0} y^2 + \tan\theta_0\, y = -\frac{g}{2\, v_0^2\ \cos^2\theta_0}\left(y^2 - 2\frac{v_0^2}{g}\cos^2\theta_0 \tan\theta_0\, y\right)$$

Posons : $\alpha = \frac{g}{2\, v_0^2\ \cos^2\theta_0}$, et poursuivons notre développement sachant que $\cos^2\theta_0 \tan\theta_0 = \sin\theta_0 \cos\theta_0$.

$$z = -\alpha\left(\left(y - \frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0\right)^2 - \left(\frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0\right)^2\right)$$

$$z - \alpha\left(\frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0\right)^2 = -\alpha\left(y - \frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0\right)^2$$

Or :

$$\alpha\left(\frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta_0$$

En introduisant Y, Z tels que :

$$Y = y - \frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 \quad \text{et} \quad Z = z - \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta_0$$

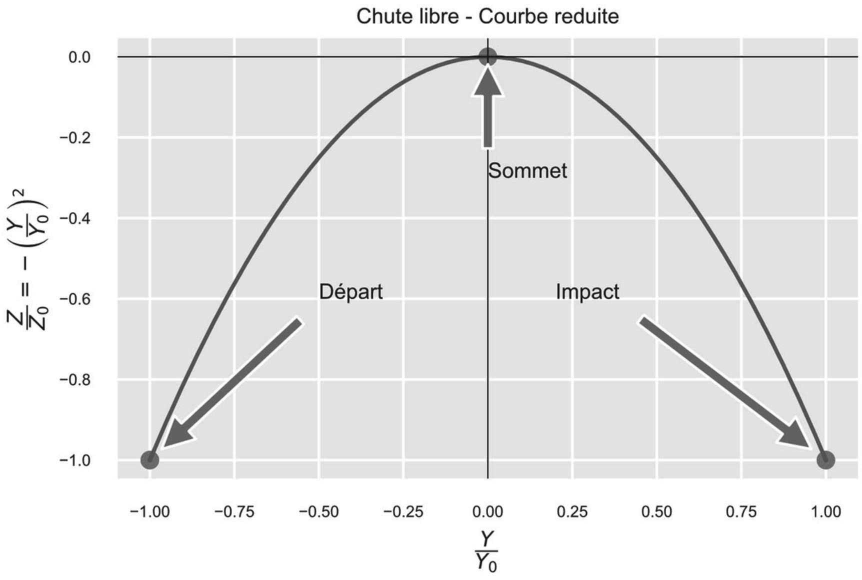
Nous obtenons :

$$Z = -\,\alpha\, Y^2$$

Après ce changement de variable, nous obtenons toujours une fonction parabolique mais centré autour de son axe. Le caractère pair de l’expression est alors évident.

Le tracé se fait en variable réduite et s'exprime comme :

$$Z = -Z_0 \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2$$



Commentaires
La question sur l'existence d'une symétrie ne nécessitait probablement pas une réduction canonique. Une rédaction soulignant le caractère symétrique d'une fonction parabolique suffisait probablement. Il est toutefois difficile d'en être certain car le rapport du jury n'est pas assez précis dans ce domaine. *Rapport de Jury :* *De nombreuses confusions étonnantes : une parabole n'est ni une hyperbole, ni un arc de cercle, ni un morceau d'ellipse. La question sur la symétrie de la trajectoire pouvait sembler ambiguë, certaines copies ont compris la question comme « la fonction est-elle paire ? ». Cette question n'aurait pas de sens physique, le projectile n'explore pas la zone $y < 0$* Vu la lecture du rapport, nous vous conseillons d'être très clair dans votre formulation. Comme vous le voyez le jury ne s'est pas contenté d'une remarque sur la parité de la fonction dans le jeu de variables initiales.

4. La détermination des coordonnées du sommet S et de la portée est aisée si vous avez procédé à la réduction canonique.

   Le sommet correspond à la référence de décalage de symétrie :

$$\boxed{z_s = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta_0}$$

   La portée correspond au double de l'abscisse du sommet :

$$\boxed{\ell = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0}$$

   Sans ce travail préliminaire, il suffit d'analyser les équations horaires, ou l'équation de la trajectoire.

<u>Méthode : analyse de l'équation horaire.</u>

Pour le sommet, le temps t_S correspond à l'instant d'annulation de la vitesse verticale :

$$v_z(t_S) = -gt_S + v_0\sin\theta_0 = 0 \;\rightarrow\; t_S = \frac{v_0}{g_0}\sin\theta_0$$

Il suffit ensuite de remplacer, dans l'équation horaire

$$z(t_s) = \left(-\frac{g}{2}\,t_S + v_0\sin\theta_0\right)t_s = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta_0$$
$$y(t_S) = v_0\cos\theta_0\,t_S = \frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0$$

La symétrie nous permet de trouver $\ell = 2\,y(t_S)$.

<u>Méthode :analyse de l'équation de la trajectoire</u>

Pour le sommet, nous sommes à l'extremum :

$$z'(y_s) = -\frac{g}{v_0^2\ \cos^2\theta_0} y_S + \tan\theta_0 = 0$$

Nous en déduisons :

$$y_S = \frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0$$

Pour la portée, nous résolvons $z(\ell) = 0$.

$$0 = -\frac{g}{2\,v_0^2\ \cos^2\theta_0}\ \ell + \tan\theta_0$$

$$\ell = 2\ \frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0$$

Toutes les méthodes convergent, bien entendu.

La portée maximale correspond au maximum de $\sin 2\theta_0$, soit :

$$\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}\ \text{ et }\ \ell_{\max} = \frac{v_0^2}{g}}$$

Commentaires

Ces questions sont très classiques, et sont plus communes dans un exercice de niveau proche du baccalauréat, que dans un concours des mines-ponts.

Il est probable que cette partie ait joué le rôle d'un espace de translation uniforme sur la distribution des candidats, l'ensemble arrivant à résoudre la problématique sans difficultés.

Attention, il arrive dans ce cas que la forme prime sur le fond.
Il semblerait toutefois que tous les candidats n'aient pas réalisé un sans-faute vu la remarque du Jury qui est à interpréter puisque toutes les erreurs d'inhomogénéités sont sanctionnées.

Rapport de Jury :
Très bien traitée. Néanmoins des erreurs d'inhomogénéités élémentaires, qui ont été systématiquement sanctionnées

I.B Tir d'un projectile sans frottements

5. La dimension du coefficent α s'obtient aisément :

$$[\alpha] = \frac{[-\vec{f}]}{[\vec{v}]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L.T^{-1}} = M.T^{-1}$$

α est homogène au rapport d'une masse sur un temps.

Vu l'identification précédente, nous pouvons définir :

$$\alpha = \frac{m}{\tau} \quad \leftrightarrow \quad \tau = \frac{m}{\alpha}$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \overrightarrow{f_v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{\alpha}{m}\,\vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\tau}\,\vec{v}$$

Nous constatons, que comme précedemment, le mouvement va rester plan car, si l'accélération n'est désormais plus constante, elle n'a de composantes que selon le champ de gravité et la vitesse.

Il n'y aura donc jamais de composante de vitesses selon l'axe x.

En effet l'équation différentielle caractérisant la vitesse est une équation différentielle linéaire du premier ordre. La vitesse ne dépendra donc que des conditions initiales et de la composante de contrainte imposée par le champ de gravité.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\,\vec{v} = \vec{g}$$

Si ces éléments ne suffisent pas, il suffit de projeter l'équation vectorielle sur l'axe x, pour obtenir :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{v_x}{\tau}$$

Comme $v_x(0) = 0$, l'accélération sur cet axe est toujours nulle, la vitesse se maintient à zéro et le mouvement n'est que dans le plan (y, z).